INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'EMPLOI D'ÉLÈVE-ATTACHÉ

et

CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique)

Option A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

DÉFINITIONS ET RAPPELS.

1. Soit E un C-espace vectoriel; $\mathcal{L}$ (E) désigne l'algèbre des endomorphismes de E.

2. Si n est un entier, M_n (C) désigne l'algèbre des matrices à coefficients complexes à n lignes et n colonnes.

3. Un endomorphisme g est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = 0$; le plus petit entier k tel que $g^k = 0$ est appelé ordre de nilpotence de g.

4. C [X] désigne l'algèbre des polynômes à coefficients complexes, en l'indéterminée X.

Si P est un polynôme à coefficients complexes, avec

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_q X^q,$$

et si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E, P (f) désigne l'endomorphisme $\alpha_0 \mathrm{Id}_E + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \ldots + \alpha_q f^q$.

De même, si $M \in M_n(\mathbb{C})$, P (M) désigne la matrice
$\alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \ldots + \alpha_q M^q$ (I_n est la matrice unité).

5. Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, on désignera par $f\Big|_F$ la restriction de f à F.

6. Si f appartient à $\mathcal{L}$ (E) où E est un espace vectoriel de dimension finie, on appellera polynôme minimal de f le polynôme unitaire Π non nul de degré minimal tel que $\Pi(f) = 0$.

7. Les résultats de la question préliminaire pourront être admis pour aborder la suite de l'épreuve.

QUESTION PRÉLIMINAIRE.

Soient F un C-espace vectoriel de dimension p et un endomorphisme f de F, nilpotent d'ordre k.

1° Montrer que $k \leqslant p$.

2° Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_l$ de F stables par f tels que :

i. $F = \bigoplus_{i=1}^{l} F_i$,

ii. $\forall i \in \{1, \ldots, l\}$, $f\Big|_{F_i}$ est nilpotent d'ordre égal à la dimension de F_i.

(On pourra raisonner par récurrence sur dim F.)

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M-Math 1
page 103
1987

I

1° Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe une famille de sous-espaces vectoriels $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de E, stables par f tels que :

i. $E = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$,

ii. $\forall j \in \{1, \ldots, m\}, \exists \lambda_j \in \mathbb{C} : (f - \lambda_j \mathrm{Id}_E)\big|_{V_j}$ est nilpotent d'ordre égal à la dimension de V_j.

Une telle décomposition de E sera appelée décomposition cellulaire relative à f; les V_j seront appelés cellules de f.

2° Montrer qu'il existe pour chaque sous-espace vectoriel V_j une base B_j telle que, relativement à cette base, la restriction de l'endomorphisme f à V_j soit représentée par une matrice de la forme :

$$M_j = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire $M_j = (a_{pq})_{(p,q) \in \{1, \ldots, n_j\}^2}$

où $n_j = \dim(V_j)$, avec $\begin{cases} p = q \Rightarrow a_{pq} = \lambda, \\ p = q - 1 \Rightarrow a_{pq} = 1, \\ p \neq q \text{ et } p \neq q - 1 \Rightarrow a_{pq} = 0. \end{cases}$

3° Soient deux décompositions cellulaires relatives à f :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j \qquad \text{et} \qquad E = \bigoplus_{k=1}^{r} W_k$$

telles que

$$\forall k \in \{1, \ldots, r\}, \qquad \exists j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad W_k \subset V_j.$$

Montrer qu'alors $r = m$ et ces deux décompositions sont égales (à l'ordre près).

4° Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de f; pour chaque i appartenant à $\{1, \ldots, s\}$, soit n_i la dimension des cellules associées à la valeur propre λ_i de dimension maximale.

Montrer que le polynôme minimal Π_f de l'endomorphisme f est $\Pi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{n_i}$.

5° *a.* Soit un sous-espace vectoriel F de E stable par f, montrer que, quel que soit le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$, F est stable par $P(f)$.

b. Soit g l'endomorphisme $P(f)$, montrer qu'il existe une décomposition cellulaire relative à g : $E = \bigoplus_{k=1}^{r} Z_k$, telle que $\forall k \in \{1, \ldots, r\}$, $\exists j \in \{1, \ldots, m\} : Z_k \subset V_j$.

II

On désigne par $\mathcal{F}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par $\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}$.

On rappelle qu'un endomorphisme σ de l'algèbre $\mathcal{F}$ est une application de $\mathcal{F}$ dans lui-même telle que

i. $\sigma \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F})$,

ii. $\sigma(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$,

iii. $\forall (g, h) \in \mathcal{F}^2, \quad \sigma(g \circ h) = \sigma(g) \circ \sigma(h)$.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

1° Montrer qu'un automorphisme σ de $\mathcal{F}$ est défini par le choix de $\sigma(f)$.

2° Montrer que, si σ est un automorphisme de $\mathcal{F}$, il existe une décomposition cellulaire commune à f et $\sigma(f)$.

Dans la suite, on considérera une décomposition $E = \bigoplus V_j$ commune à f et $\sigma(f)$.

Tournez la page S. V. P.

page 1987 404
ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M -Math 1

3° Soit V_j une cellule relative à f de dimension k telle que :

$$(f - \lambda \, \mathrm{Id}_E)^{k-1}\Big|_{V_j} \neq 0 \quad \text{et} \quad (f - \lambda \, \mathrm{Id}_E)^{k}\Big|_{V_j} = 0;$$

montrer qu'alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que :

$$(\sigma(f) - \mu \, \mathrm{Id}_E)^{k-1}\Big|_{V_j} \neq 0 \quad \text{et} \quad (\sigma(f) - \mu \, \mathrm{Id}_E)^{k}\Big|_{V_j} = 0.$$

4° *a.* Montrer que $\sigma(f)$ a le même polynôme minimal que f.

b. Montrer que $\sigma(f)$ a les mêmes valeurs propres que f.

5° On suppose dans la suite de cette partie que $\Pi_f(X)$ est égal à $\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{n_i}$ avec $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ et les n_i sont des entiers strictement positifs distincts deux à deux; on considère, pour chaque cellule V_j relative à f, une base $B_j = (e_{s_{j-1}+1}, \ldots, e_{s_j})$, répondant à la question I.2°, et la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est obtenue en réunissant les bases B_j.

a. Montrer que, relativement à cette base, f et $\sigma(f)$ sont représentées par les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_l \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} M'_1 & & & 0 \\ & M'_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M'_l \end{pmatrix}$$

où les matrices $M_1, \ldots, M_l$ sont carrées et du type présenté à la question I.2° et les matrices $M'_1, \ldots, M'_l$ sont carrées.

b. Montrer que $\forall\, i \in \{1, \ldots, l\}$ M_i et M'_i sont semblables.

c. Montrer qu'il existe un automorphisme φ de E tel que $\sigma(f) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

d. Montrer que, pour définir σ, il suffit de déterminer un polynôme P de degré inférieur strictement à celui de Π_f, tel que $\forall\, i \in \{1, \ldots, l\}$ $P(M_i)$ soit semblable à M_i.

III

1° Soit N une matrice nilpotente d'ordre p, dans $M_p(\mathbb{C})$.

a. Montrer que la matrice N′ de $M_p(\mathbb{C})$ est semblable à N si et seulement si elle est nilpotente d'ordre p.

b. Soit $Q(X) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ un polynôme à coefficients complexes.

i. Montrer que $Q(N)$ est nilpotente si et seulement si $a_0 = 0$.

ii. Montrer que $Q(N)$ est semblable à N si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.

iii. Montrer que si $Q(X)$ vérifie $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, il existe un polynôme $R(X)$ tel que $R \circ Q(N) = N$.

iv. Montrer qu'alors l'endomorphisme σ de l'algèbre engendrée par N, défini par $\sigma(N) = Q(N)$, est un automorphisme.

2° Soit $M = N + \lambda I_p$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrer que l'endomorphisme de l'algèbre engendrée par M défini par $\sigma(N) = Q(N)$ est un automorphisme.

3° Que peut-on en conclure quant au cardinal du groupe des automorphismes de l'algèbre engendrée par M ?

IV

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M - Math 1
page 1014 - D
1987

1° Montrer que, si l'endomorphisme σ de l'algèbre engendrée par A est un automorphisme, alors il est défini par $\sigma(A) = P(A)$ où le polynôme P a les propriétés suivantes :

i. $P(1) = 1$,

ii. $P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

iii. $P\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2° Soient P_2 le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)^2$ et P_3 le reste de la division euclidienne de P par $(X - 3)^3$.

a. Montrer que :

$$P_2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que $P_2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ si et seulement si $P_2(2) = 2$ et $P_2'(2) \neq 0$.

c. Montrer que $P_3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ si et seulement si $P_3(3) = 3$ et $P_3'(3) \neq 0$.

3° *a.* Montrer qu'il existe deux polynômes u et v de degrés respectifs vérifiant

$$d^\circ(u) < 3 \quad \text{et} \quad d^\circ(v) < 2$$

tels que

$$u(X)(X - 2)^2 + v(X)(X - 3)^3 = 1.$$

b. Soient P_2 et P_3 des polynômes vérifiant les conditions du IV. 2° *b.* et IV. 2° *c.* avec $d^\circ(P_2) \leqslant 1$, $d^\circ(P_3) \leqslant 2$; montrer qu'il existe P tel que :

P_2 soit le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)^2$;

P_3 soit le reste de la division euclidienne de P par $(X - 3)^3$;

et que $P(1) = 1$, avec $d^\circ P \leqslant 5$.

c. Montrer que l'endomorphisme σ de l'algèbre engendrée par A, défini par $\sigma(A) = P(A)$, est un automorphisme.

4° Que peut-on en déduire quant au cardinal du groupe des automorphismes de l'algèbre engendrée par A?

• • •
c